# CPE 332
# Computer Engineering Mathematics II

## Week 10
## Part III, Chapter 8
## Error, Transcendental Function and Power Series
## Taylor Series and Function Approximation

# Today Topics

- Numerical Methods
- Errors
- Transcendental Function
- Series
- Power Series
- Taylor Series
- MacLaurin Series
- Function Approximation
- HW VII
- MT Exam and Cumulative Grades

# Numerical Methods

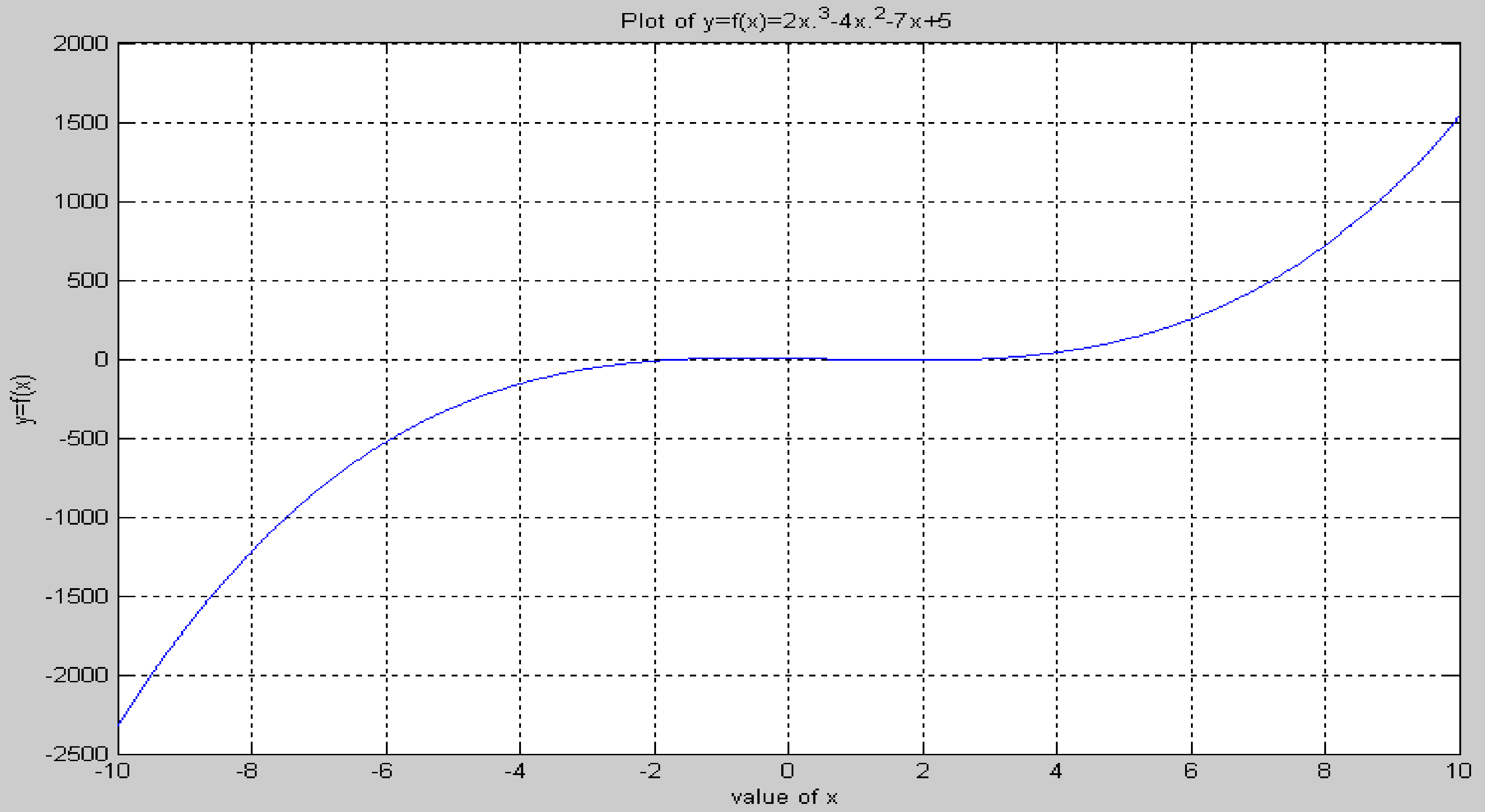
- ในวิชาคณิตศาสตร์ที่เราเรียนที่ผ่านมา การหา Solution จะประกอบด้วยการแก้สมการ ซึ่งรวมถึงการแก้สมการพิคณิต การหา Derivative การ Integrate การแก้สมการ Differential Equation รวมถึงการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้สมการ เช่น Fourier Transform, Laplace Transform หรือ Z-Transform วิธีการดังกล่าวจัดว่าเป็นการแก้ปัญหาที่เรียก Analytical Method อย่างไรก็ตาม ไม่ใช่ว่าสมการทุกสมการจะหาคำตอบได้(ที่อยู่ในรูปของ Explicit Form) ดังนั้นเราจำเป็นที่จะต้องหาวิธีอื่นในการแก้ปัญหา นั่นก็คือวิธีการที่เรียก Numerical Method

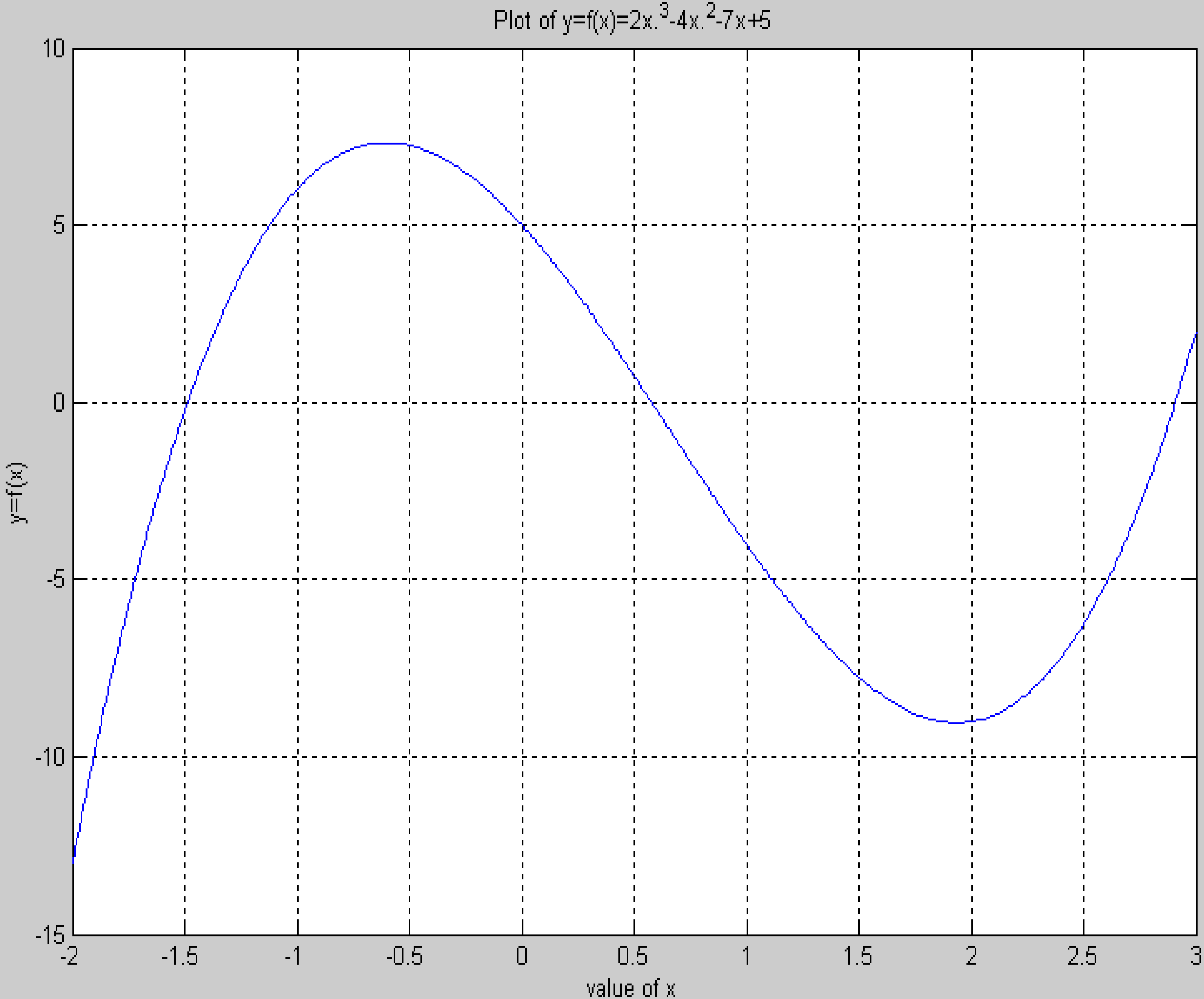
# Numerical Methods

- วิธีการทาง Numerical ที่เคยใช้กันมาได้แก่วิธีการ Graphical Method และใช้บวนการ Interpolation แต่เมื่อมีการประดิษฐ์คอมพิวเตอร์ขึ้นมา ก็มีการนำคอมพิวเตอร์เข้ามาใช้ และขยายขอบเขตของวิชานี้ออกเป็นสาขาใหม่ทางคณิตศาสตร์ มีการศึกษา Algorithm และวิธีการเขียนโปรแกรม รวมถึงการวิเคราะห์ค่าความผิดพลาด(Error Analysis) และลักษณะการ Convergence และ Complexity ของ Algorithm

# $Y=f(x)=2x^3-4x^2-7x+5$

- หา f(k) เช่น f(0), f(-2), f(7) ง่าย
- แก้สมการ f(x)=k จะยาก เช่น หาค่า x ที่ทำให้ f(x) = 0

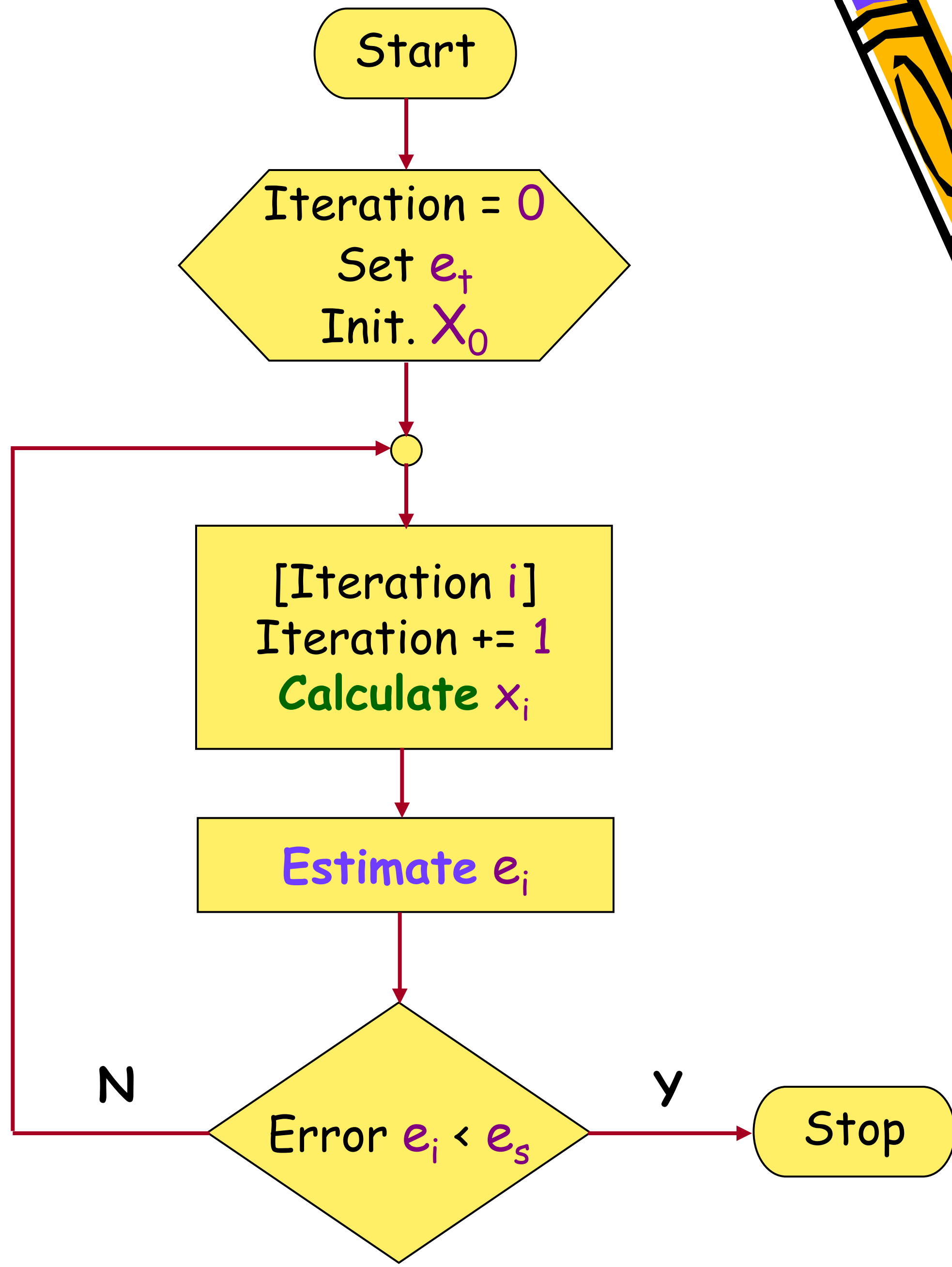



Plot of y=f(x)=2x.^3-4x.^2-7x+5
10
5
0
-5
-10
-15
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
value of x
y=f(x)

# Quadratic Equation

- Polynomial Degree = 1, Straight Line
  - $y = f(x) = mx+b$;  $x = (y-b)/m$
- Polynomial Degree = 2
- $y = f(x) = ax^2+bx+c$
- แก้สมการ $y = f(x) = 3$ เราได้
  - $y' = f'(x) = ax^2+bx+(c-3) = 0$
  - $x = [-b\pm\sqrt{}(b2-4a(c-3))]/2a$
- Polynimial Degree = n, n > 2
  - ไม่มีสมการโดยตรงในการแก้,
  - แต่มี Algorithm ในวิธีของ Numerical Method
    - *Algorithm จะเป็น Iterative Method*
  - คำตอบของ Numerical Method จะให้แค่ค่าประมาณ
    - *ค่าจะถูกต้องขึ้นเรื่อยๆ ใน Iteration ที่สูงขึ้น (คำนวณนานขึ้น) ถ้า Algorithm Converge*

# Iterative Technique




**โปรแกรมจะ Converge ถ้า $e_i < e_{i-1}$**

# Errors

- ในการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยแก้ปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์นั้น จะต้องเข้าใจก่อนว่าลักษณะการทำงานของคอมพิวเตอร์ หรือการคำนวณจะขึ้นอยู่กับวิธีการที่เราเขียนโปรแกรมและ *Algorithm* ที่ใช้ ในการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณใดใดจะมี Error เกิดขึ้นเสมอ ซึ่งจะแบ่งได้เป็นสองประเภทคือ ***Round-Off Error*** และ ***Truncation Error***

# Errors

- ***Round-Off Error เกิดจากการเก็บตัวเลขใน Memory ของคอมพิวเตอร์นั้นจะใช้ขนาดของ Memory ที่จำกัด และขึ้นอยู่กับว่าเราให้ตัวแปรชนิดอะไร เช่น Integer, Long Integer, Float, หรือ Double***

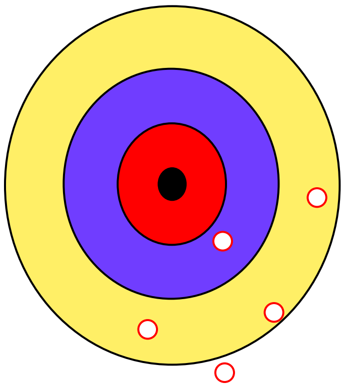
# Errors

- *Truncation Error เกิดจาก Algorithm หรือวิธีที่เราให้คอมพิวเตอร์คำนวณ นั้นเป็นแค่การประมาณ จากสมการทางคณิตศาสตร์ที่เราต้องการหาค่าโดยใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วย และเราไม่ได้แก้สมการทางคณิตศาสตร์จริงๆ*
  - *การคำนวณ จะต้องมีการบวกกันของ Infinite Terms จึงจะได้ค่าที่ถูกต้อง ดังนั้นคอมพิวเตอร์จะคำนวณ ค่าประมาณ โดยตัดเทอมท้ายๆทิ้ง*

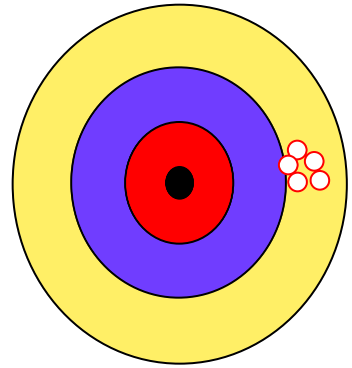
# Precision, Accuracy, Significant Digit

- ดังนั้นเราจำเป็นที่จะต้องรู้ว่า Error เรามีมากแค่ไหน และพอจะยอมรับได้หรือไม่ นั้นขึ้นอยู่กับการนำการคำนวณไปใช้งาน ปกติตัวเลขที่จะไปใช้งานทางวิศวกรรมศาสตร์จะกำหนดด้วยค่า ***Significant Digit*** และจะยอมให้ความไม่แน่นอนของตกเลขตกอยู่ที่หลักท้ายเท่านั้น ดังนั้นค่าของ Significant Digit จะบ่งบอกถึงจำนวนหลักของตัวเลขที่จะนำไปใช้ได้อย่างมั่นใจ
- คำว่า ***Accuracy*** หมายถึงตัวเลขที่เราได้นั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าในความเป็นจริงเท่าไร แต่คำว่า ***Precision*** หมายถึงตัวเลขที่ได้มานั้นเกาะกลุ่มกันมากแค่ไหน ดังนั้นค่าของ Precision จะเป็นตัวกำหนดจำนวนของ Significant Digit ที่จะต้องใช้ และค่าของ Error จะเป็นตัวกำหนดความ Accuracy ของตัวเลข

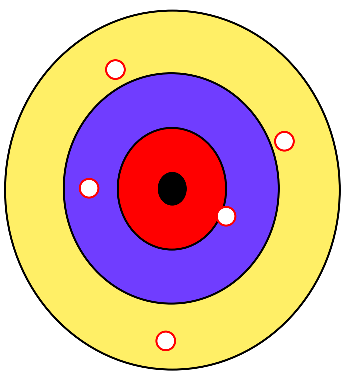
# การยิงเป้า



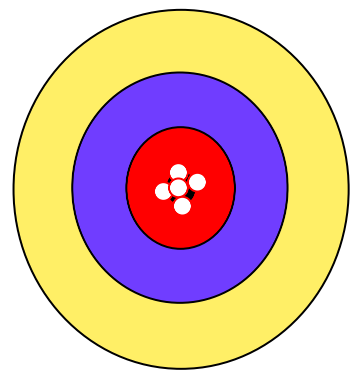
**Precision = ต่ำ**
**Accuracy = ต่ำ**



**Precision = สูง**
**Accuracy = ต่ำ**



**Precision = ต่ำ**
**Accuracy = สูง**



**Precision = สูง**
**Accuracy = สูง**

**Accuracy วัดจากค่า Error ที่เกิดระหว่างค่าเฉลี่ยของ Data กับค่าจริง**

**Precision วัดจากค่า Variance หรือ SD ของกลุ่มของ Data**

# Significant Digits (Figures)

- คือตัวเลขที่มีความหมายในการกำหนดค่า Precision
  - เป็นเลขทุกตัวยกเว้นเลขศูนย์นำหน้า และศูนย์ที่ต่อท้าย
    - จำนวนศูนย์ต่อท้ายที่เป็นส่วนของ s.f. บางทีเรากำหนดโดยใช้เครื่องหมาย 'bar'
- Examples
  - 11.152 = 5 s.f.
  - 0.00879 = 3 s.f.
  - 000125600. = 6 s.f.
  - 0123400$\underline{0}$00 = 7 s.f.
- เลขทางขวามือของ s.f. จะไม่นำมาใส่ ให้ทำการ Round-Off เช่น
  - 456.389864 (6 s.f.) = 456.390
  - 1287563.94 (3 s.f.) = 12$\underline{9}$0000

# Error

- คือค่าที่แตกต่างจากค่าที่แท้จริง
- เป็นตัวกำหนดค่า *Accuracy*
- แบ่งเป็น
  - Absolute Error, $E_t$
  - Relative Error (%จากค่าจริง), $e_t$
- นอกจากนี้ยังมี
  - Estimated Error, $e_a$
    - ค่าประมาณของ Error (Relative Error)

# Absolute Error

$$\text{True Value} = \text{Approximation} + \text{Error}$$

หรือ

$$\text{Error} = E_t = \text{True Value - Approximation}$$

# Relative Error

$$e_t = \frac{Error}{\text{True Value}} \times 100\ \% = \frac{\text{True Value - Approximation}}{\text{True Value}} \times 100\ \%$$

# Error Estimation

- Convergence
- Divergence

$$e_a = \frac{\text{Approximate Error}}{\text{Approximation}} \times 100\,\%$$

$$e_a = \frac{\text{Present Approximation - Previous Approximation}}{\text{Present Approximation}} \times 100\,\%$$

# Mean Square Error(MSE)

- ในการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าที่แท้จริงกับค่าที่ประมาณได้ สำหรับกลุ่มของตัวอย่าง เรามักจะใช้ค่าเฉลี่ยของ Error ในรูปของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของ Error ในแต่ละคู่ เรียก Mean Square Error
  - ถ้าให้ Y เป็นค่าที่แท้จริง และ $\hat{Y}$ เป็นค่าที่ประมาณได้สำหรับคู่ของตัวอย่าง N ตัวอย่าง

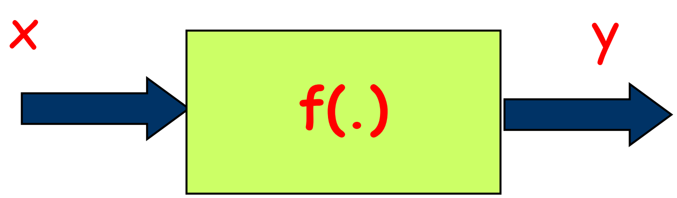
$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(\hat{Y}_i - Y_i)^2$$

  - ค่า RMSE หรือค่า Root Mean Square Error คือค่า Square Root ของค่า MSE

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(\hat{Y}_i - Y_i)^2}$$

# Functions

- เป็นความสัมพันธ์แสดง Set ของ Input และ Set ของ Output
  - Function สามารถรับค่า Input ได้หลาย Set (หลายตัวแปร)
  - การ Mapping เป็นทางเดียว
    - ถ้า Map กลับจะเป็น อีก Function ที่เป็น Inverse Function กับตัวเดิม
    - Inverse อาจจะไม่มีสำหรับบาง Function




$y=f(x)$

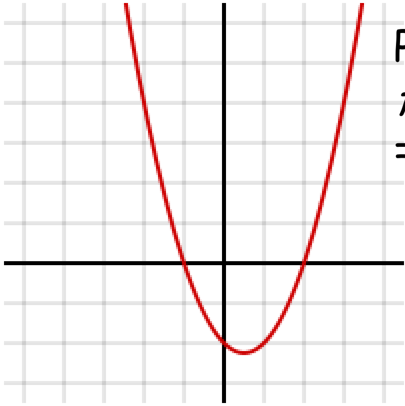
$x=f^{-1}(y)$ อาจจะไม่มี

# Polynomial Functions

- เป็นรูปแบบของ Function ที่ง่ายที่สุด
- Polynomial function Degree 'n' จะอยู่ในรูปของ(One Argument)

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$



Polynomial of degree 2:

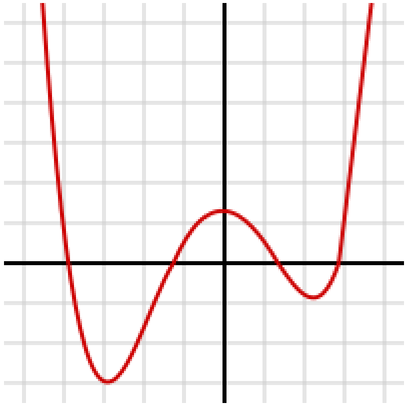
$f(x) = x^2 - x - 2$

$= (x+1)(x-2)$

Polynomial of degree 3:

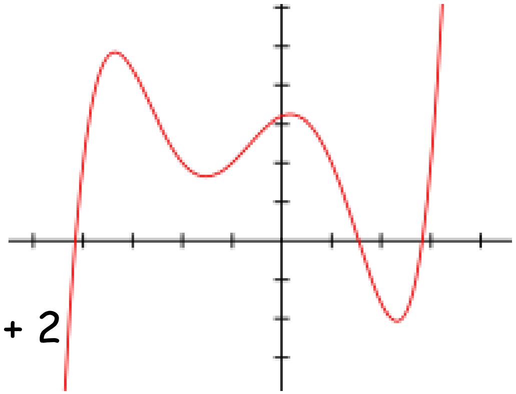
$f(x) = x^3/4 + 3x^2/4 - 3x/2 - 2$

$= 1/4\ (x+4)(x+1)(x-2)$



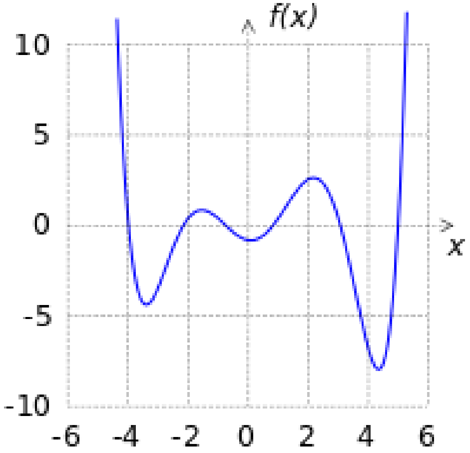
Polynomial of degree 4:

$f(x) = 1/14\ (x+4)(x+1)(x-1)(x-3) + 0.5$

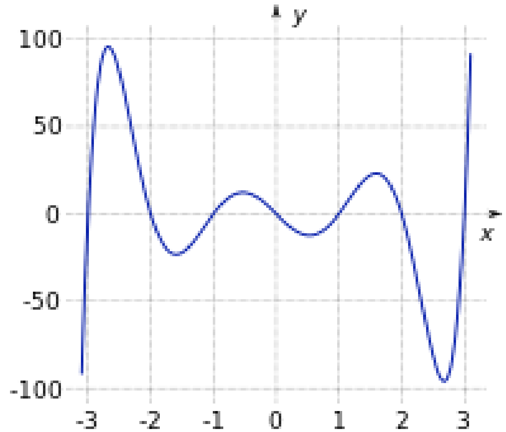


Polynomial of degree 5:

$f(x) = 1/20\ (x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$




เอามาจาก
http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial




Polynomial of degree 6:

$f(x) = 1/30\ (x+3.5)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)(x-4) + 2$

Polynomial of degree 7:

$f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x)(x+1)(x+2)(x+3)$

# Transcendental Function

- เป็น Function ที่ไม่ใช่ Algebraic
  - Algebraic function คือ Function ที่สามารถนิยามได้จาก Root ของสมการ Polynomial
- Transcendental Function ไม่สามารถเขียนในรูป Solution ของ Polynomial
  - Exponential Function
  - Logarithm
  - Trigonometric Functions
- ด้วยเหตุผลนี้ การหาค่าของ Function อาจจะต้องใช้วิธีการประมาณค่าแทน

# Transcendental Examples

$$f_1(x) = x^{\pi}$$

$$f_2(x) = c^{x},\ c \neq 0,1$$

$$f_3(x) = x^{x}$$

$$f_4(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$f_5(x) = \log_c x,\ c \neq 0,1$$

$$f_6(x) = \sin x$$

# การประมาณค่าของ Function

- ในส่วนนี้เราจะ Review เรื่อง
  - Infinite Series
  - Power Series
  - Taylor Series
  - Maclaurin Series
  - การประมาณค่าโดยใช้ Series

# Series และ Infinite Series

- Series คือผลรวมของเทอมใน Sequence ในกรณีของ Infinite Series นั้น เทอมที่จะต้องนำมาบวกกันจะไม่มีที่สิ้นสุด
- ถ้าให้แต่ละเทอมใน Sequence เป็น $a_n$ ดังนั้น Series คือ $a_1+a_2+a_3+\ldots$ เช่น

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}; S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

NOTE: บางครั้ง Index ของ Summation อาจจะเริ่มที่ 0 ก็ได้

# Convergence of Series

- Series จะ Converge ก็ต่อเมื่อผลรวมของ Term สามารถหาค่าได้
  - กล่าวคือผลรวมของเทอมจนถึง N มี Limit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

- ถ้า Series ไม่ Converge มันจะ Diverge

# Power Series

- Power Series เป็น Infinite Series ในรูปของ (c = Constant, $a_n$ = coefficient, x เป็น Variable ที่อยู่รอบๆ c)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

- Power Series ที่สำคัญคือ Taylor Series

- ในกรณีที่ c=0 เราได้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

เช่นในกรณีของ Maclaurin Series

# Taylor Series/Maclaurin Series

- ให้ f(x) เป็น Function ที่สามารถหา Derivative ได้อย่างไม่จำกัดในช่วงใกล้เคียงกับ a ดังนั้น Taylor Series ของ f(x) คือ Power Series ในรูปของ

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- ในกรณีที่ a = 0 บางครั้งเราเรียก Maclaurin Series

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

### 9.2 Taylor's Theorem

**ทฤษฎีบท**

ถ้า Function $f$ และค่า $n+1$ Derivative แรกของมันมีความต่อเนื่องในช่วงของ $a$ และ $x$ ดังนั้นค่าของ Function ที่จุด $x$ สามารถแสดงได้โดย

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

โดย $R_n$ เรียก Remainder และให้นิยามว่าเป็น

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ซึ่งค่าของ Remainder ดังกล่าวยังสามารถเขียนในรูปที่เรียก Derivative Form หรือ Lagrange Form ดังนี้

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

สมการข้างบนรู้จักกันในนาม Taylor Series หรือ Taylor's Formula ซึ่งถ้าไม่รวม $R_n$ สมการที่เหลือก็คือค่าประมาณของ $f(x)$ ที่มีลักษณะเป็น Polynomial กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าของ Function ใดๆที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนด สามารถประมาณได้จากสมการของ Polynomial

การละเทอม $R_n$ ออกจากสมการ จะส่งผลให้การคำนวณค่าประมาณนั้นมี Error นี่คือที่มาของ Truncation Error ที่เรากล่าวในบทที่ 7 ดังนั้นการหาค่าของ Function ขึ้นอยู่ว่าเราต้องการ Significant Digit แค่ไหน ซึ่งจะเป็นตัวจะกำหนดว่าเราต้องใช้กี่เทอมใน Polynomial และจะลงเอยด้วย Degree ของ Polynomial และ Derivative ของ Function ที่จุด $a$ ที่ต้องใช้

ถ้าให้ $a$ เป็นจุดของ Function ที่เรารู้ค่าของมัน และ Derivative ของมัน และสมมุติว่าอยู่ที่ $x_i$ เราสามารถใช้ Taylor Series ประมาณค่าของ Function ที่จุดใหม่ กล่าวคือ $x_{i+1}$ โดยกำหนดขนาดของ Step $h = x_{i+1} - x_i$ ให้มีค่าเท่าๆกัน เช่น

$$Zero-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

$$First-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h$$

$$Second-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$

และโดยทั่วไปเราสามารถเขียน

$$n-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n$$

โดยที่ค่า Remainder สามารถแสดงได้เป็น $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$

# Example 1

- $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \dots$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ..$$

Suppose $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

We have $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Example find $f(2) = e^2$

Second Order Approximation : $e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2} = 5$

Forth Order Approximation : $e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} = 7$

Sixth Order Approximation : $e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} = 7.356$

Eighth Order Approximation : $e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} = 7.3873$

Actual Value : $e^2 = 7.389056099$

นักศึกษาหาค่าประมาณของ $e^{-2}$ ถึง 4 Significant Digit ได้หรือไม่

# Example 2:

$$f(x) = f(0) + f'(a)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ..$$

Suppose $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)} = \sin(x), \ldots$

We have $f(x) = \sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Example find $f(0.5) = \sin 0.5$ radian

Second Order Approximation : $\sin 0.5 \approx 0.5$

Forth Order Approximation : $\sin 0.5 \approx 0.5 - \frac{0.5^3}{3!} = 0.47916667$

Sixth Order Approximation : $\sin 0.5 \approx 0.5 - \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^5}{5!} = 0.47942708$

Eighth Order Approximation : $\sin 0.5 \approx 0.5 - \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^5}{5!} - \frac{0.5^7}{7!} = 0.479425533$

Actual Value : $\sin 0.5 = 0.479425538$

นักศึกษาหาค่าประมาณของ cos 0.5 ถึง 8 Significant Digit ได้หรือไม่

# Taylor (Maclaurin) Series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;\ \forall x$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};\ -1 \le x < 1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};\ -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;\ |x| < 1$$

$$\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{m} x^n;\ x \ne 1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n;\ |x| < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 (4n)} x^n = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \cdots;\ |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots;\ \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots;\ \forall x$$

# MATLAB Program

- จะสาธิตการเขียน Function โดยใช้ MATLAB
  - เขียน Function ที่รับค่า Vector x และ Vector y return z1 และ z2; x=-3:.1:3; y = -3:.1:3
  - คำนวณค่า z1 = 2sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)
  - คำนวณค่า z2 = xsiny-ycosx
  - mesh (x,y,z1), (x,y,z2), (x,z1), (y,z2) และ (z1,z2)
  - Surf function, shading modes
  - Contour plot
- ศึกษาวิธีการเขียน Function ใน MATLAB โดยดูจาก Tutorial 4-5

# END OF WEEK 10

- Download HW 7
- Next Week Chapter 9: Zeros of Functions

# MATLAB Program

```
function [z1,z2]=test(x,y)

% function [z1,z2]=test(x,y)
% Test matlab program calculate z1=f(x,y)=sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)
% and z2=f(x,y)=xsiny-ysinx

n=length(x);
m=length(y);
z1=zeros(n,m);
z2=zeros(n,m);
for i = 1:n
    for j= 1:m
        t=x(i)^2+y(j)^2;
        if (t ~= 0)
            z1(i,j)=sin(t)/t;
        else
            z1(i,j)=1;
        end
        z2(i,j)=x(i)*sin(y(j))-y(j)*cos(x(i));
    end
end
```

# MATLAB Program

- function view2(x,y,z,az)
- mesh(x,y,z);
- view(0,az);
- for i = 0:10:360
- view(i,az);
- pause(0.05);
- end

# MATLAB Program

- function view3(az)

- view(0,az);
- for i = 0:10:360
-         view(i,az);
-         pause(0.05);
- end